Charge et décharge d'un condensateur

I. Rappels et circuit étudié

1. Le condensateur dans un circuit

Un condensateur de capacité C (exprimée en farad, F) emmagasine une charge électrique q proportionnelle à la tension u_C à ses bornes :

$$\boxed{q(t) = C \cdot u_C(t)}$$

En convention récepteur, l'intensité du courant qui le traverse est liée à la variation de sa charge :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

2. Le circuit RC série

On étudie le circuit composé d'un générateur de tension idéale de force électromotrice E, d'un conducteur ohmique de résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'un interrupteur K, montés en série.

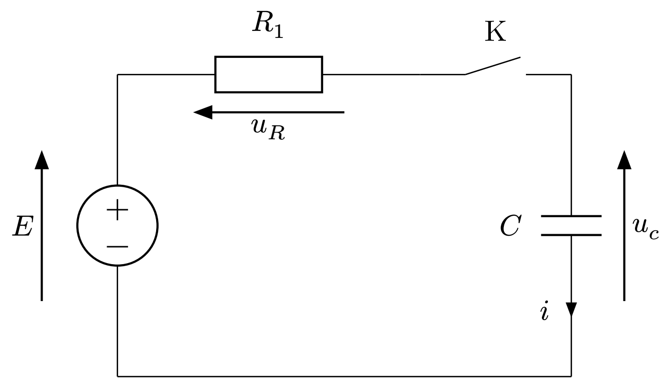


Fig. 1. – Circuit de charge du condensateur

II. Établissement de l'équation différentielle (charge)

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Le condensateur, initialement déchargé, commence à se charger.

1. Application de la loi des mailles

Avec les orientations choisies sur le schéma :

$$E = u_R(t) + u_C(t)$$

Or, d'après la loi d'Ohm appliquée au conducteur ohmique en convention récepteur :

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

Et puisque $i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, on en déduit :

$$u_R(t) = RC \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

2. Forme canonique de l'équation différentielle

En substituant dans la loi des mailles :

$$\boxed{RC \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E}$$

Il s'agit d'une équation différentielle **linéaire du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre constant**.

III. Résolution de l'équation différentielle

1. Forme de la solution

La solution générale d'une telle équation s'écrit comme la somme :

- d'une **solution particulière** constante (régime permanent) ;
- de la **solution générale de l'équation homogène** (régime transitoire).

On cherche donc une solution de la forme :

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

où $\tau = RC$ est appelée **constante de temps** du circuit.

2. Détermination des constantes A et B

Régime permanent (quand $t \to +\infty$) : le condensateur est complètement chargé, plus aucun courant ne circule, donc $u_C \to E$. On en déduit :

$$B = E$$

Condition initiale : à $t = 0$, le condensateur est déchargé : $u_C(0) = 0$. Donc :

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -E$$

3. Solution complète

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC}$$

L'intensité du courant de charge vaut alors :

$$i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

IV. La constante de temps τ

1. Définition et unité

$$\tau = RC$$

Par analyse dimensionnelle, $\boldsymbol{\tau}$ **est bien une durée**, exprimée en secondes.

2. Interprétation physique

τ caractérise la **rapidité** avec laquelle le condensateur se charge :

- plus τ est grand, plus la charge est lente ;
- plus τ est petit, plus la charge est rapide.

À RETENIR

Valeurs remarquables de la charge :

- à $t = \tau$: $u_C = E(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63 \cdot E$
- à $t = 3\tau$: $u_C \approx 0{,}95 \cdot E$
- à $t = 5\tau$: $u_C \approx 0{,}99 \cdot E$

On considère généralement que le régime permanent est atteint au bout de 5τ.

V. Détermination graphique de τ

À partir d'un enregistrement de $u_C(t)$, trois méthodes équivalentes permettent de mesurer τ.

1. Méthode 1 : tangente à l'origine

La pente de la tangente à la courbe $u_C(t)$ au point $t = 0$ vaut :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{E}{\tau}$$

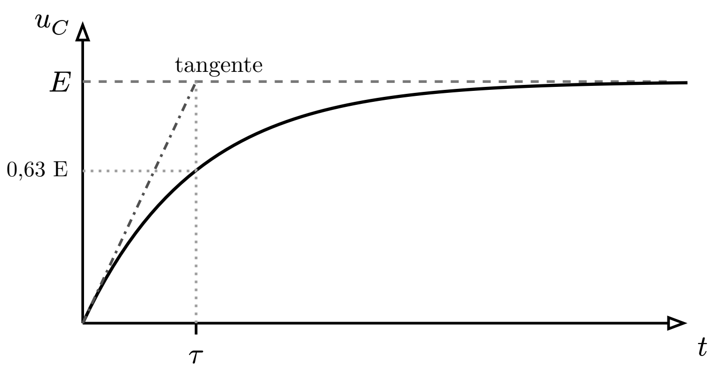
La tangente à l'origine coupe donc l'asymptote horizontale $u_C = E$ au point d'abscisse $t = \tau$.

2. Méthode 2 : méthode des 63 % (charge)

On cherche graphiquement la valeur du temps pour laquelle :

$$u_C = 0{,}63 \cdot E$$

L'abscisse correspondante donne directement τ.



3. Méthode 3 : méthode des 37 % (décharge)

Cette méthode s'applique à la phase de **décharge** (voir section suivante). On cherche le temps pour lequel :

$$u_C = 0{,}37 \cdot U_0$$

où U_0 est la tension initiale aux bornes du condensateur chargé.

VI. Décharge du condensateur

1. Équation différentielle de la décharge

Le condensateur a été préalablement chargé sous la tension U_0. On bascule alors l'interrupteur pour le déconnecter du générateur et le brancher sur la seule résistance R.

La loi des mailles donne :

$$u_R(t) + u_C(t) = 0$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{RC \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0}$$

2. Solution

Avec la condition initiale $u_C(0) = U_0$:

$$\boxed{u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

La tension décroît exponentiellement vers 0.